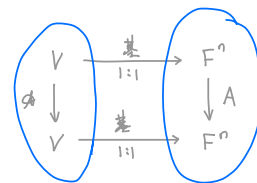


线性变换 & 基下矩阵

几何	基 坐标系	代数
线性空间		数域空间
向量		向量的坐标
线性变换		基下矩阵



α 与 $A\alpha$ 在同一基下的坐标之间的关系.

定理: 设 $\phi: V \rightarrow V$ 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A .

$x, y \in V$ 在 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 $X, Y \in F^n$, 则

$$y = \phi(x) \Rightarrow Y = AX. \quad (\text{即若 } x \text{ 的坐标为 } X, \text{ 则 } \phi x \text{ 的坐标为 } AX.)$$

证明:

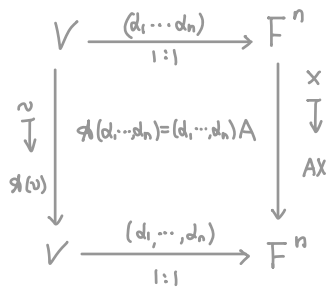
$$\begin{cases} A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) A \\ x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) X \\ y = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) Y \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = \phi(x) &= \phi((\alpha_1, \dots, \alpha_n) X) = (\phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) X \\ &= ((\alpha_1, \dots, \alpha_n) A) X = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) (AX) \end{aligned}$$

坐标的唯一性 $\Rightarrow Y = AX$.

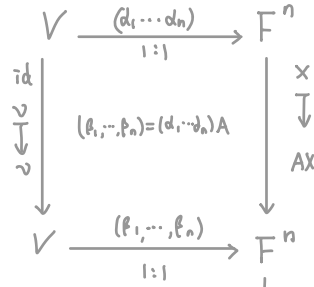
两种坐标变换公式

线性变换的矩阵



一个向量与它在 \mathcal{A} 下的像在同一基下的坐标之同构

基变换, 坐标变换公式



同一个向量在不同基下坐标之间的关系

例: $\mathcal{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ (2, 3, 5)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ (1, 2, 0)^T \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ (0, 1, 2)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ (2, 4, -1)^T \end{pmatrix}$

$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ (1, 0, 0)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_3 \\ (3, 0, 5)^T \end{pmatrix}$

(1) \mathcal{A} 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 (2) \mathcal{A} 在自然基下的矩阵.

解: (1) 设 \mathcal{A} 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 A . 则

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$$

$$\Rightarrow A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -5 \\ -10 & -23 & 5 \\ -7 & -16 & 13 \end{pmatrix}$$

(2) 设 \mathcal{A} 在自然基下的矩阵为 B , 则

$$\text{定理} \Rightarrow \beta_i = B\alpha_i \quad i=1, 2, 3$$

$$\Rightarrow (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = B(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$\Rightarrow B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -20 & 11 \\ 0 & -16 & 10 \\ 5 & -15 & 7 \end{pmatrix}$$

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 为 n 维 F -线性空间 V 的一组基.

$$\{V \text{ 上的线性变换} \} \xrightarrow[\text{1:1}]{\alpha_1, \dots, \alpha_n} F^{n \times n}$$

$A \longmapsto A$ 在 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵.

$\mathcal{B} \longleftarrow B$

反之, 给定 n 阶矩阵 $B = (b_{ij})$, 我们可如下定义线性变换.

$\forall \alpha = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n \in V,$

$$\mathcal{B}(\alpha) := \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \right) \alpha_i = (\alpha_1 \dots \alpha_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

首先: \mathcal{B} 为 V 上的线性变换.

$$\cdot \mathcal{B}(\alpha + \beta) = \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\beta)$$

$$\cdot \mathcal{B}(\lambda \alpha) = \lambda \mathcal{B}(\alpha).$$

其次: $\mathcal{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1 \dots \alpha_n) B.$

§ 线性变换的运算

定理: 设 A, B 为 V 上的线性变换 任取 $\lambda \in F$.
 如下定义 V 上的自映射 $\lambda A, A+B$ 和 $A \circ B$:

$$\cdot (\lambda A)(v) := A(\lambda v) \quad \forall v \in V$$

$$\cdot (A+B)(v) := A(v) + B(v) \quad \forall v \in V$$

$$\cdot (A \circ B)(v) := A(B(v)) \quad \forall v \in V$$

则 $\lambda A, A+B$ 与 $A \circ B$ 均为 V 上的线性变换. 所有 V 上的线性变换在数乘和加法下构成线性空间.

例: 若 A, B 在基 e_1, \dots, e_n 下的矩阵为 A, B , 则 $\lambda A, A+B$ 和 $A \circ B$ 在基 e_1, \dots, e_n 下的矩阵分别为 $\lambda A, A+B, AB$.

$$A^k := \underbrace{A \circ A \circ \dots \circ A}_{k \text{ 次}} \quad (A^0 := Id)$$

$$\forall f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in F[x]$$

$$f(A) := a_0 \cdot Id + a_1 A + \dots + a_n A^n$$

例: $A \leftrightarrow A \Rightarrow f(A) \leftrightarrow f(A)$.

更一般地, $\exp(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$\exp(A) = I + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

④ **性质:** 若 $AB=BA$, 则 $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.

§ 线性变换在不同基下的矩阵.

定理: 设 V 上的线性变换 $A: V \rightarrow V$ 在两组基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 和 β_1, \dots, β_n 下的矩阵为 A 和 B . 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 到 β_1, \dots, β_n 的过渡矩阵为 T . 则

$$B = T^{-1}AT$$

$$\left. \begin{aligned} \text{证: } A(\alpha_1 \cdots \alpha_n) &= (\alpha_1 \cdots \alpha_n)A \\ A(\beta_1 \cdots \beta_n) &= (\beta_1 \cdots \beta_n)B \\ (\beta_1 \cdots \beta_n) &= (\alpha_1 \cdots \alpha_n)T \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} A(\beta_1 \cdots \beta_n) &= A((\alpha_1 \cdots \alpha_n)T) = (A(\alpha_1 \cdots \alpha_n)) \cdot T = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)AT \\ &= (\beta_1 \cdots \beta_n)T^{-1}AT \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = T^{-1}AT. \quad \square$$

例. $A: F^3 \rightarrow F^3$ 满足

$$A\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 4 & 9 & -5 \\ -10 & -23 & 15 \\ -7 & -16 & 13 \end{pmatrix}$$

A 在 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵 $C = ?$ $\stackrel{=}{=} A$

$$\text{解: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} T \Rightarrow T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 3 \\ 10 & 4 & -10 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(5)

§ 矩阵的相似

定义: 设 $A, B \in F^{n \times n}$. 若 \exists 可逆阵 $T \in F^{n \times n}$ 使得 $B = T^{-1}AT$ 则称 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$.

性质: 相似为等价关系. 即

(1) 反身性:

(2) 对称性:

(3) 传递性:

证: ...

根据相似关系将 $F^{n \times n}$ 分为若干类.

相似类, 代表元

定理 \Rightarrow 不同基下矩阵相似. 反之, 属于该相似类的矩阵, 均为该线性变换在不同基下对应的矩阵.

$$A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)A$$

$$B \text{ 与 } A \text{ 相似} \Rightarrow B = T^{-1}AT \quad (\text{其中 } T \text{ 可逆})$$

$$(\beta_1, \dots, \beta_n) := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)T \quad \text{则 } \beta_1, \dots, \beta_n \text{ 为基.}$$

$$\Rightarrow A(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n)B.$$

相似不变量. 例: 行列式, 秩

问题: 1) 两矩阵相似的条件? 相抵关系: 1) rank

⑥ 2) 最简代表元?

2) 相抵标准形

例: 同余为等价关系

$$m \equiv n \pmod{3}$$

将 \mathbb{Z} 分成 3 个等价类

$$\bar{0} = \{ \dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots \}$$

$$\bar{1} = \{ \dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots \}$$

$$\bar{2} = \{ \dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots \}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2}.$$