线性变换 & 基下矩阵

几何 $\xrightarrow[\text{坐标系}]{\text{基}}$	代数
线性空间	数组空间
向量	向量的坐标
线性变换	基下矩阵

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\text{基}", "1:1"'] \arrow[d, "\mathscr{A}"'] & F^n \arrow[d, "A"] \\ V \arrow[r, "\text{基}", "1:1"'] & F^n \end{tikzcd}$$

x 与 $\mathscr{A}x$ 在同一基下的坐标之间的关系.

定理: 设 $\mathscr{A}: V \to V$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为 A.

$x, y \in V$ 在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标为 $X, Y \in F^n$, 则

$y = \mathscr{A}(x) \Rightarrow Y = AX$. (即 若 x 的坐标为 X, 则 $\mathscr{A}x$ 的坐标为 AX.)

证明:
$$\begin{cases} \mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) A \\ x = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) X \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ y = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = \mathscr{A}(x) = \mathscr{A}\Big((\alpha_1 \cdots \alpha_n) X\Big) = \Big(\mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\Big) X$$

$$= \Big((\alpha_1, \cdots, \alpha_n) A\Big) X = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)(AX)$$

坐标的唯一性 $\Rightarrow$ $Y = AX$.

两种坐标变换公式

线性变换的矩阵

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "(\alpha_1\cdots\alpha_n)", "1:1"'] \arrow[d, "\xi \mapsto \mathscr{A}(\xi)"'] \arrow[dr, phantom, "\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A"] & F^n \arrow[d, "X \mapsto AX"] \\
V \arrow[r, "(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)", "1:1"'] & F^n
\end{tikzcd}$$

一个向量与它在$\mathscr{A}$下的像在同一基下的坐标之间关系

基变换，坐标变换公式

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "(\alpha_1\cdots\alpha_n)", "1:1"'] \arrow[d, "\mathrm{id}", "\xi \mapsto \xi"'] \arrow[dr, phantom, "(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A"] & F^n \arrow[d, "X \mapsto AX"] \\
V \arrow[r, "(\beta_1,\cdots,\beta_n)", "1:1"'] & F^n
\end{tikzcd}$$

同一个向量在不同基下坐标之间的关系

例：$\mathscr{A}(\overset{\alpha_1}{(2,3,5)^T}) = \overset{\beta_1}{(1,2,0)^T}$ $\quad \mathscr{A}(\overset{\alpha_2}{(0,1,2)^T}) = \overset{\beta_2}{(2,4,-1)^T}$

$\mathscr{A}(\overset{\alpha_3}{(1,0,0)^T}) = \overset{\beta_3}{(3,0,5)^T}$

(1) $\mathscr{A}$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵 (2). $\mathscr{A}$在自然基下的矩阵.

解：(1) 设$\mathscr{A}$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$A$. 则

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A$$

$$\Rightarrow A = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -5 \\ -10 & -23 & 15 \\ -7 & -16 & 13 \end{pmatrix}$$

(2). 设$\mathscr{A}$在自然基下的矩阵之B，则

定理 $\Rightarrow \beta_i = B\alpha_i \quad i=1,2,3$

$$\Rightarrow (\beta_1,\beta_2,\beta_3) = B(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

$$\Rightarrow B = (\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -20 & 11 \\ 0 & -16 & 10 \\ 5 & -15 & 7 \end{pmatrix}$$

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 n 维 F-线性空间 V 的一组基.

$$\{V\text{上的线性变换}\} \xrightarrow[1:1]{\alpha_1\cdots\alpha_n} F^{n\times n}$$

$$\mathcal{A} \longmapsto \mathcal{A}\text{在}\alpha_1\cdots\alpha_n\text{下的矩阵}.$$

$$\mathcal{B} \longleftarrow B$$

反之，给定 n 阶矩阵 $B=(b_{ij})$，我们可如下定义线性变换、

$\forall\ \alpha = x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n \in V$，

$$\mathcal{B}(\alpha) := \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, x_j\right)\alpha_i \quad = (\alpha_1\cdots,\alpha_n)\,B\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

首先：$\mathcal{B}$ 为 V 上的线性变换、

- $\mathcal{B}(\alpha+\beta) = \mathcal{B}(\alpha)+\mathcal{B}(\beta)$
- $\mathcal{B}(\lambda\alpha) = \lambda\mathcal{B}(\alpha)$.

其次：$\mathcal{B}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) = (\alpha_1\cdots\alpha_n)\,B$.

§ 线性变换的运算

定理：设 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 为 V 上的两个线性变换，任取 $\lambda \in F$.
如下定义 V 上的自映射 $\lambda\mathscr{A}$，$\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{A}\circ\mathscr{B}$：

- $(\lambda\mathscr{A})(v) := \mathscr{A}(\lambda v) \quad \forall v \in V$
- $(\mathscr{A}+\mathscr{B})(v) := \mathscr{A}(v)+\mathscr{B}(v) \quad \forall v \in V$
- $(\mathscr{A}\circ\mathscr{B})(v) := \mathscr{A}(\mathscr{B}(v)) \quad \forall v \in V$

则 $\lambda\mathscr{A}$，$\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{A}\circ\mathscr{B}$ 均为 V 上的线性变换，所有 V 上的线性变换在数乘和加法下构成线性空间.

例：若 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 在基 $e_1,\cdots e_n$ 下的矩阵为 A，B，则 $\lambda\mathscr{A}$，$\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{A}\circ\mathscr{B}$ 在基 $e_1,\cdots,e_n$ 下的矩阵分别为 λA，$A+B$，AB.

$$\mathscr{A}^k := \underbrace{\mathscr{A}\circ\mathscr{A}\circ\cdots\circ\mathscr{A}}_{k\text{次}} \qquad (\mathscr{A}^0 := \mathrm{id})$$

$$\forall f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in F[x]$$

$$f(\mathscr{A}) := a_0\cdot\mathrm{Id} + a_1\mathscr{A} + \cdots + a_n\mathscr{A}^n .$$

例：$\mathscr{A} \Leftrightarrow A \Rightarrow f(\mathscr{A}) \Leftrightarrow f(A)$.

更一般地，$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$$\exp(\mathscr{A}) = I + \frac{\mathscr{A}}{1} + \frac{\mathscr{A}^2}{2!} + \frac{\mathscr{A}^3}{3!} + \cdots$$

④ **性质**：若 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$，则 $\exp(\mathscr{A}+\mathscr{B}) = \exp(\mathscr{A})\cdot\exp(\mathscr{B})$.

§ 线性变换在不同基下的矩阵.

定理: 设 V 上的线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 在两组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 下的矩阵为 A 和 B. 设 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 到 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 的过渡矩阵为 T. 则

$$B = T^{-1}AT$$

证:
$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{A}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)A \\ \mathscr{A}(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\beta_1 \cdots \beta_n)B \\ (\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)T \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathscr{A}(\beta_1 \cdots \beta_n) = \mathscr{A}\big((\alpha_1 \cdots \alpha_n)T\big) = \big(\mathscr{A}(\alpha_1 \cdots \alpha_n)\big) \cdot T = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)AT$$

$$= (\beta_1 \cdots \beta_n)T^{-1}AT$$

$$\Rightarrow B = T^{-1}AT.$$

□

例. $\mathscr{A}: F^3 \to F^3$ 满足

$$\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\underbrace{\begin{pmatrix}4 & 9 & -5\\-10 & -23 & 15\\-7 & -16 & 13\end{pmatrix}}_{=A}$$

$\mathscr{A}$ 在 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$ 下的矩阵 $C = ?$

解: $\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\0 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\3 & 1 & 0\\5 & 2 & 0\end{pmatrix}T \Rightarrow T = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\3 & 1 & -3\\3 & 2 & -4\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow C = T^{-1}AT = \begin{pmatrix}-10 & 2 & 3\\10 & 4 & -10\\-2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

§ 矩阵的相似

定义: 设 $A,B\in F^{n\times n}$. 若 $\exists$ 可逆阵 $T\in F^{n\times n}$ 使得 $B=T^{-1}AT$
则称 A 与 B 相似, 记为 $A\sim B$.

性质: 相似为等价关系. 即

(1) 反身性:

(2) 对称性:

(3) 传递性:

证: ...

根据相似关系将 $F^{n\times n}$ 分为若干类.

相似类, 代表元

例: 同余为等价关系

$m\equiv n \mod 3$

将 $\mathbb{Z}$ 分成 3 个等价类

$\bar{0}=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\}$

$\bar{1}=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\}$

$\bar{2}=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}=\bar{0}\cup\bar{1}\cup\bar{2}$.

定理 $\Rightarrow$ 不同基下矩阵相似. 反之, 属于该相似类的矩阵, 均为该线性变换在不同基下对应的矩阵.

$\mathcal{A}(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$

B 与 A 相似 $\Rightarrow$ $B=T^{-1}AT$ (其中 T 可逆)

$(\beta_1\cdots\beta_n):=(\alpha_1\cdots\alpha_n)T$ 则 $\beta_1\cdots\beta_n$ 为基.

$\Rightarrow \mathcal{A}(\beta_1\cdots\beta_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)B$.

相似不变量. 例: 行列式, 秩

问题: 1) 两矩阵相似的条件? 相抵关系: 1) rank

2) 最简代表元? 2) 相抵标准形